8 mars 2011

- Struktur på laborativt arbetssätt: Från det konkreta till det abstrakta
- Praktiskt arbete med *Korta aktiviteter*, men även koppla dem till förmågorna
- Elevers dokumentation
- Kunskapsöversikten
- Modellering

Matematik är en abstrakt och generell vetenskap

Struktur för laborativt arbetssätt

1. Gemensam introduktion
2. Laborativa aktiviteter
3. Gemensam diskussion och uppföljning

Arbetsgång

Konkret: arbete med laborativa material

Halvkonkret: en representation av verklig situation, material byts mot bilder

Halvabstrakt: informell symbolisk representation, t ex ringar och streck

Abstrakt: bilder och informella symboler ersätts med formella symboler, räkneregler, räknelagar och andra konventioner

(Heddens, 1986)

Pengar i fickorna

- Välj talområde
- Till eleven: Du har *x* kr och ska lägga dem i två byxfickor. Hur kan du göra?
  - Använd skolpengar
  - Rita av eller använd stämplar
  - Hitta på egna, enkla symboler
  - Skriv med siffror och andra symboler

Problemlösning i klassrummet

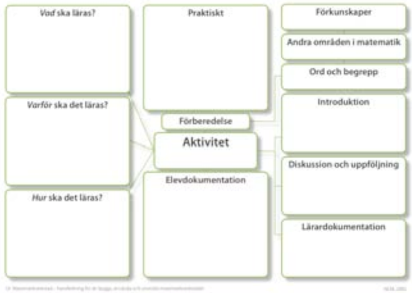
1. Lärarna väljer ett problem
2. Problemet presenteras
3. Eleverna arbetar
   - enskilt
   - par- eller gruppvis
4. Läraren observerar elevernas olika metoder
5. Eleverna presenterar lösningen
6. Gemensam diskussion

Vad? – matematikinnehåll

Varför? – mål

Hur? – metod

Planeringsunderlag

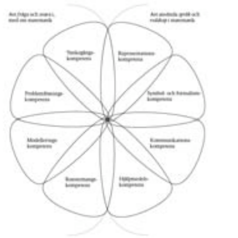


Kompetenser

- Tankegångskompetens
- Problembehandlingskompetens
- Representationskompetens
- Resonemangskompetens
- Symbol- och formalismkompetens
- Kommunikationskompetens
- Modelleringskompetens
- Hjälpmedelskompetens

pub.uvm.dk/2002/kom/

Kompetenser
Danmark – Sverige



Från den danska KOM-rapporten, Mogens Niss

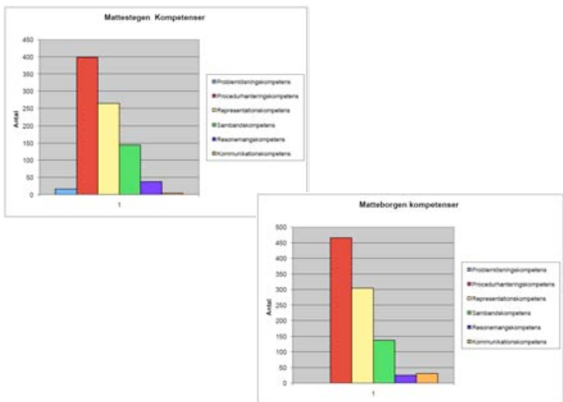
Syfte
- Procedurhanteringskompetens
- Representationskompetens
- Sambandskompetens
- Resonemangskompetens
- Kommunikationskompetens
- Problemlösningskompetens
- (Modelleringskompetens)

Använda i förarbeten till nya svenska kursplanen …

Lgr11

Genom undervisningen i ämnet matematik ska eleverna sammanfattningsvis ges förutsättningar att utveckla sin förmåga att

- formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder
- använda och analysera matematiska begrepp och samband mellan begrepp
- välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter
- föra och följa matematiska resonemang
- använda matematikens uttrycksformer för att samtala om, argumentera och redogöra för frågeställningar, beräkningar och slutsatser.



Rika tärningar

(Antalet tärningar · 7) – Ant prickar på den översta tärningen

$(t \cdot 7) - p$
t = ant tärningar
p = ant prickar på den översta tärningen

$(n \cdot 7) - y$
n = ant tärningar
y = ant prickar på den översta tärningen

$7n - y$

Barbara Clarke, Nämnaren nr 4, 2003

Tankegångs-kompetens

- att känna till, förstå och hantera givna matematiska begrepp och tankegångar
- att utifrån ett begrepps egenskaper kunna lyfta det till en alltmer abstrakt nivå
- att förstå vad generalisering innebär och att själv kunna göra generaliseringar så att räckvidden eller omfattningen ökar hos en större grupp objekt/händelser/beteenden/påståenden.

	Specifik	Generell
Konkret	Det är 3 på ena sidan av den här blåa tärningen. Allt ska bli 7. Då måste det vara 4 på andra sidan.	Lägger man ihop talen mitt emot varandra, på den här blå tärningen blir svaret alltid 7.
Abstrakt	7=3+4 7=3+_ 3+_=7	Summan av motstående sidor på tärningar är alltid 7.

	Specifik	Generell
Konkret	Det finns 3 tärningar. Jag tar 3 gånger 7. Sen tar jag bort de 4 prickarna på toppen.	Ant tärningar gånger 7 och sen minus prickarna på toppen.
Abstrakt	$(3 \cdot 7) - 4$	$7n - y$

Problembehandlings-kompetens

Kunna både formulera och lösa problem

Vi började med ett enklare problem och tog först bara två tärningar.

Summan av prickarna på de två tärningarnas motstående sidor är 14.

Prickarna på den översta tärningen är 4.

Sedan tog vi 14 – 4 = 10

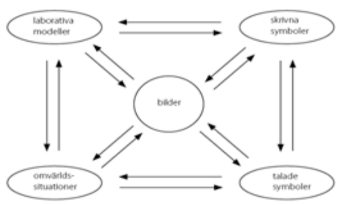
Representations-kompetens

- att kunna förstå och använda olika slags representationer
- att kunna uppfatta inbördes kopplingar och ha kännedom om deras styrkor och svagheter
- att kunna välja bland och översätta mellan olika representationsformer beroende på situation och syfte.

Kunna uttrycka sambandet
- med hjälp av tärningarna – *konkreta representationer*
- i ord – *verbala representationer*
- genom att rita enkla symboler för tärningarna och prickarna – *bildmässiga representationer*
- uttrycka sambandet med hjälp av en formel – *algebraiska representationer*

Representationskompetens

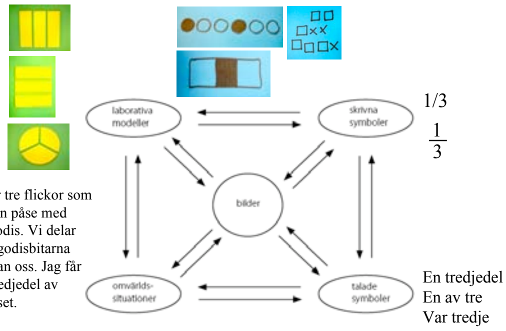
Representationer



Bearbetning efter Lesh 1981 (Skolverket, 1997, s 16)

Olika representationer av en tredjedel

Vi är tre flickor som har en påse med lösgodis. Vi delar upp godisbitarna mellan oss. Jag får en tredjedel av godiset.



Bearbetning efter Lesh 1981 (Skolverket, 1997, s 16)

Resonemangs-kompetens

att kunna följa och bedöma ett matematiskt resonemang

Stina: Vad händer om man har fyra tämingar?

Marko: Ska man ta 1+ 7 då, eftersom man lägger till en täming?

Stina: Nej, så kan det väl inte vara. Det är ju inte prickarna som ökar med ett, utan antalet tämingar. Kan man inte tänka 4 tämingar gånger 7 minus prickarna på toppen?

Marko: Vi testar …

Symbol- och formalism-kompetens

att kunna
- avkoda
- översätta mellan symboliskt matematiskt språk och naturligt språk
- använda sig av symboler i utsagor och uttryck.

Ta antalet tämingar och gångra det med 7
och ta sedan minus antalet prickar på toppen.
⇓
$7n - y$

Kommunikations-kompetens

- att kunna tolka matematikinnehållet i andras skriftliga, muntliga eller visuella beskrivningar
- att själv kunna uttrycka ett matematikinnehåll på olika sätt och på olika nivåer anpassat för mottagarna.

Beskriv vad du kommit fram till för både en elev i åk 1 och för en matematiklärare.

Modellerings-kompetens

- att kunna översätta från en icke-matematisk situation till matematik
- analysera och kritiskt granska
- samt avmatematisera modellen

- att utifrån en verklig situation – *tre tärningar med dolda sidor*
  finna en matematisk modell – *uttryckt i vardagligt språk eller formel*
- kritiskt granska modellen – *korrekt? användbar? finns fler?*
- avmatematisera – *från modell till verklighet*

Hjälpmedels-kompetens

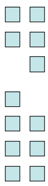
- att kunna använda sig av olika hjälpmedel i matematik och vara medveten om deras möjligheter och begränsningar
- både tekniska hjälpmedel och konkret material

En standardtärning är konstruerad så att prickarna på motstående sida alltid är sju tillsammans.

Udda och jämnt

n st $\quad$ m st $\quad$ $(n+m)$ st

- En term udda och en jämn
  $(2n + 1) + 2m = 2(n + m) + 1$
- Två udda termer
  $(2n + 1) + (2m + 1) = 2n + 2m + 2 = 2(n + m + 1)$
- Två jämna termer
  $2n + 2m = 2(n + m)$



I praksis: Problemløsning del 1

www.skoleipraksis.no

eller

ncm.gu.se

matematikverkstad

studiecirkel

kompletterande material

Grodhopp

Strävorna

Grodhopp

Regler

En röd och en grön grodfamilj möts på den smala stigen till dammen. De vill komma förbi varandra och de kan göra det på följande sätt:

- De röda grodorna kan bara hoppa åt höger och de gröna grodorna kan bara hoppa åt vänster. De får inte hoppa tillbaka.
- De kan hoppa till en ledig plats precis bredvid eller så kan de hoppa över en groda från den andra familjen.
- Det får bara rum en groda på varje plats.

Uppgiften är löst när de båda familjer helt bytt plats.

Grodhopp

1. Lägg tre röda och tre gröna grodor med en tom plats i mitten.
2. Låt familjerna byta plats enligt reglerna.
3. När du är färdig, gör det en gång till! Den här gången ska du räkna alla hoppen.
4. Prova nu att bara sätta upp en groda från varje familj. Hur många hopp behövs? Prova sedan med två grodor från varje familj.
5. Gör en tabell där du skriver in antal grodor i den ena kolumnen och antal hopp i den andra.
6. Ser du något samband?
7. Gissa hur många hopp det blir om det är fyra grodor från varje familj som ska byta plats. Anteckna och prova sedan om det stämmer.

Väldigt många grodhopp

Eftersom vädret blivit så fint är det plötsligt massor med grodor som vill till dammen för att bada och sedan hoppa upp till skuggan under träden.

- Gissa hur många hopp som behövs när det är 50 och sedan 100 grodor som ska byta plats.
- Kan du på något sätt räkna ut hur många hopp som behövs? Hur?
- Kan du med ord skriva en eller ett par meningar som beskriver hur många hopp som behövs för ett visst antal grodor?

Försök att skriva en regel eller formel för hur du kan räkna ut hur många hopp som behövs, oavsett hur många grodor det är.

Antal grodor i varje familj	Antal hopp tills alla bytt plats	Ökning
1	3	5
2	8	7
3	15	9
4	24	

Antal grodor i varje familj	Antal hopp tills alla bytt plats			
1	3	$1 \cdot 3$	$2^2 - 1$	3
2	8	$2 \cdot 4$	$3^2 - 1$	$3 + 5$
3	15	$3 \cdot 5$	$4^2 - 1$	$3 + 5 + 7$
4	24	$4 \cdot 6$	$5^2 - 1$	$3 + 5 + 7 + 9$
...	...	...	...	...
50	2600	$50 \cdot 52$	$51^2 - 1$	$3 + 5 + 7 + \ldots + (2 \cdot 50 + 1) = 2600$
100	10200	$100 \cdot 102$	$101^2 - 1$	$3 + 5 + 7 + \ldots + 201 = 10200$
n		$n(n+2)$	$(n+1)^2 - 1$	$3 + 5 + 7 + \ldots + (2n+1)$

Förenkla tillsammans de olika uttrycken:

$$n(n+2) = n^2 + 2n$$

$$(n+1)^2 - 1 = (n^2 + 2n + 1) - 1 = n^2 + 2n$$

$$3 + 5 + 7 + \ldots + (2n+1) = \frac{(3 + (2n+1)) \cdot n}{2} = \frac{(2n+4) \cdot n}{2} = (n+2) \cdot n = n^2 + 2n$$

Tornet i Hanoi

http://www.it.uu.se/edu/course/homepage/grundprog/vt07/schema/rekursion.pdf

Lgr11

Den [Undervisningen] ska också ge eleverna möjlighet att uppleva estetiska värden i möten med matematiska mönster, former och samband. (Syfte)

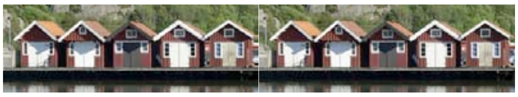
Centralt innehåll (en punkt vald från varje nivå)

Algebra (1–3)
Hur enkla mönster i talföljder och enkla geometriska mönster kan konstrueras, beskrivas och uttryckas.

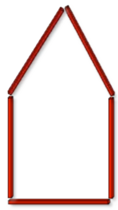
Algebra (4–6)
Obekanta tal och deras egenskaper samt situationer där det finns behov av att beteckna ett obekant tal med en symbol.

Algebra (7–9)
Innebörden av variabelbegreppet och dess användning i algebraiska uttryck, formler och ekvationer.

Algebra med stickor

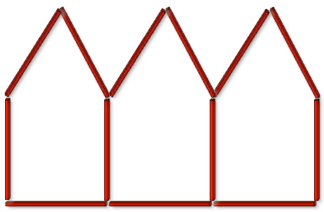


Använd 5 stickor och bygg en fiskebod



Algebra med stickor

Fortsätt att bygga bodar i ett växande mönster som på bilden



Algebra med stickor

Figur #	Antal stickor
1	
2	
3	
4	
5	
6	
…	
n	

- Hur många stickor behövs för att bygga 6 fiskebodar?
- Beskriv med egna ord hur mönstret växer.
- Hur kan du uttrycka mönstret med en formel?
- Hur många stickor behövs för att bygga 99 fiskebodar?

Algebra med stickor

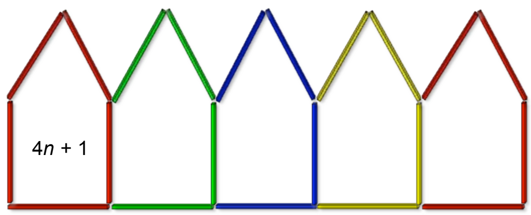
Figur #	Antal stickor
1	$1 + (1 \cdot 4) = 5$
2	$1 + (2 \cdot 4) = 9$
3	$1 + (3 \cdot 4) = 13$
4	$1 + (4 \cdot 4) = 17$
5	$1 + (5 \cdot 4) = 21$
6	$1 + (6 \cdot 4) = 25$
…	…
n	$1 + (n \cdot 4) =$ $1 + 4n =$ $4n + 1$

- Hur många stickor behövs för att bygga 6 fiskebodar?
- Beskriv med egna ord hur mönstret växer.
- Hur kan du uttrycka mönstret med en formel?
- Hur många stickor behövs för att bygga 99 fiskebodar?

$4 \cdot 99 + 1 = 397$ stickor

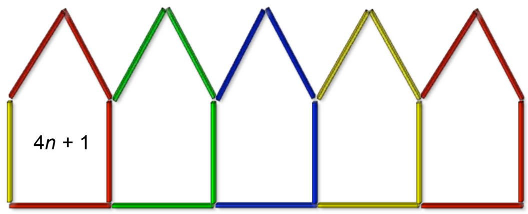
Algebra med stickor

Använd olika färger för att hjälpa eleverna att förstå mönstret …

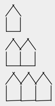


Algebra med stickor

Använd olika färger för att hjälpa eleverna att förstå mönstret …



Fyrfältsblad

Händelse *Fiskebodar*	
Bild 	Tal $\# 1 \quad 1 + (1 \cdot 4) = 5$ $\# 2 \quad 1 + (2 \cdot 4) = 9$ $\# 3 \quad 1 + (3 \cdot 4) = 13$ $\# 4 \quad 1 + (4 \cdot 4) = 17$ etc
Ord *Först byggde jag en bod med fem stickor, sen en andra med fyra stickor. Efter det fortsatte jag …*	Formel 1 sticka + 4 stickor till varje bod 1 st + 4 st · antalet bodar 1 st + 4 st · n $1 + 4 \cdot n$ $1 + 4n$ $4n + 1$

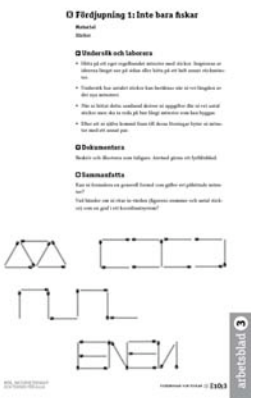
NTA
Uppdrag 10

Hitta på ett eget regelbundet mönster. (…)

Undersök hur antalet stickor kan beräknas när ni vet längden av det nya mönstret.

När ni hittat detta samband skriver ni uppgifter där ni vet antal stickor men ska ta reda på hur långt mönster som kan byggas.

Efter att ni själva kommit fram till dessa lösningar byter ni mönster med ett annat par.



Röd = 10 000

Gul = 1000

Orange = 100

Lila = 10

Grön = 1

Blå = 0,1

Turkos = 0,01

Annan färg = 0,001

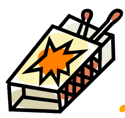
Tillhör grundmaterial i en MV. En förpackning med 1400 färdigmålade(!) stickor kostar ca 40 kr.

Area med stickor

- Enkelt att hitta material (billigt)
- Enkel aktivitet att introducera
- Materialet är nödvändigt
- Viktigt att dokumentera
- Mer matematikinnehåll än man kanske först anar
- Det är en utmaning även för duktiga elever
- En omkrets → flera areor
- …

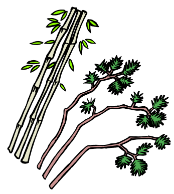
Area med stickor

Du kan använda …



(tänd)stickor

sugrör



bambukäppar

stockar – inte allt för stora :-)

Area med stickor

Allt som behövs är 12 stickor i samma längd

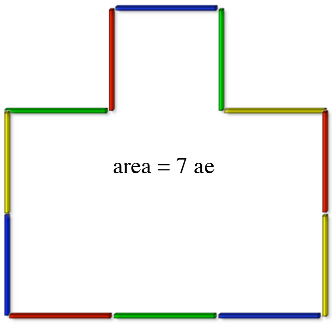
= en längdenhet = le

= en areaenhet = ae

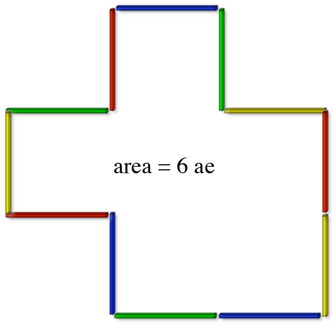
Area med stickor

Strävorna 2C

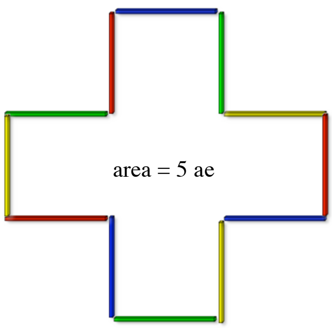
Area med stickor



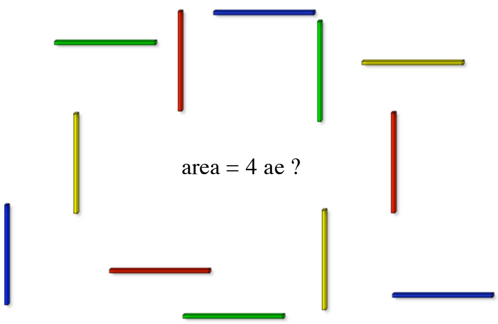
Area med stickor



Area med stickor



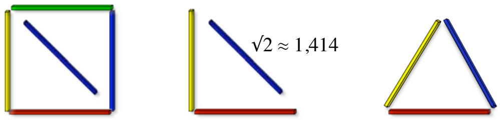
Area med stickor



Area med stickor

En vanlig fråga: Är det ok att använda trianglar?

Ja, det är det, men titta på detta:



Rätvinklig triangel?

Hypotenusan är längre än en sticka …

Liksidig triangel?

Från Nationella provet år 9, vt 2007, uppgift 18

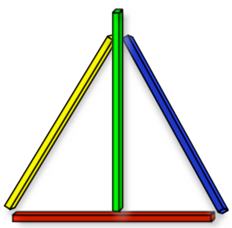
Sidan i en liksidig triangel är 5 dm. Hur stor area har triangeln? Ett av alternativen är rätt. Ringa in ditt svar.

$6{,}3\ dm^2$ $10{,}8\ dm^2$ $12{,}5\ dm^2$ $15\ dm^2$ $25\ dm^2$

Lösningsproportion

Flickor: 0,10 Pojkar: 0,13

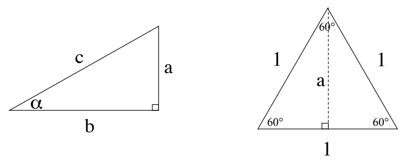
Area med stickor



area < 0,5 ae

area ≈ 0,43 ae

Area with sticks

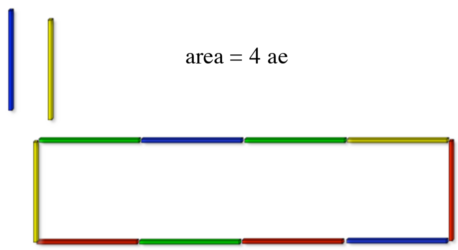


$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Rightarrow c \cdot \sin(\alpha) = a$$

$$1 \cdot \sin(60) = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{l.u.} \quad \text{Area of a triangle} = \frac{\text{base} \cdot \text{altitude}}{2}$$

$$\frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}43\ \text{a.u.}$$

Area med stickor



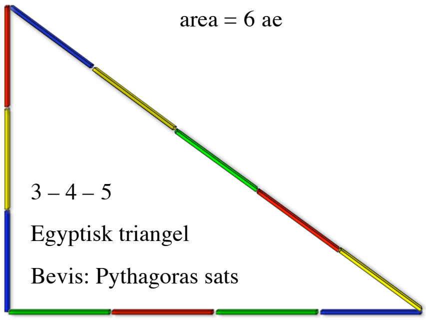
area = 4 ae

Area med stickor

area = 4 ae

Area med stickor

area = 6 ae



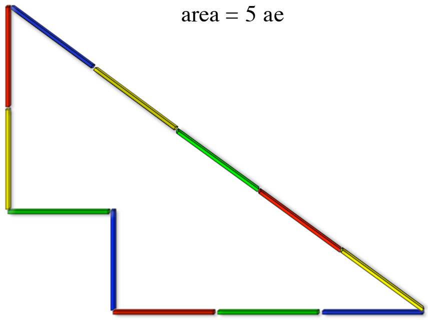
3 – 4 – 5

Egyptisk triangel

Bevis: Pythagoras sats

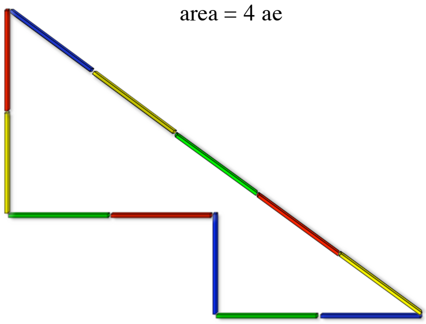
Area med stickor

area = 5 ae



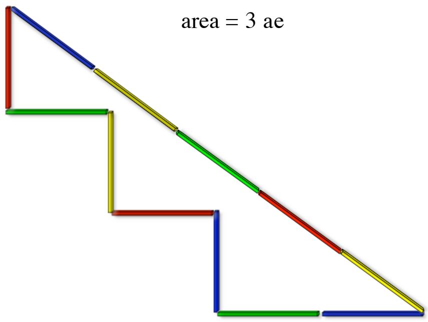
Area med stickor

area = 4 ae



Area med stickor

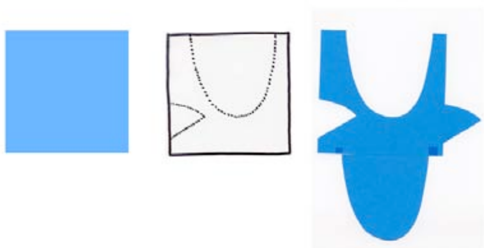
area = 3 ae

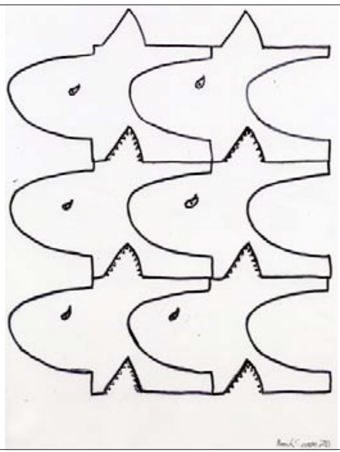


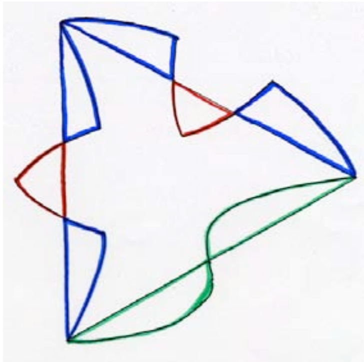
Tessellering

A tessellation is created when a shape is repeated over and over again covering a plane without any gaps or overlaps

Tessellering



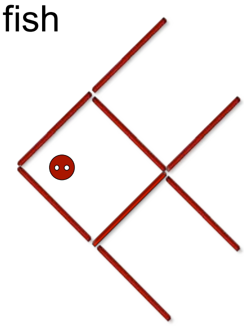




The fish

8 sticks and 1 button
(or a piece of paper)

Move 3 sticks and the button so the fish swims in the opposite direction

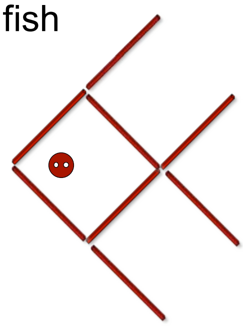


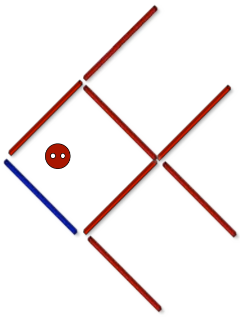
The fish

Why?

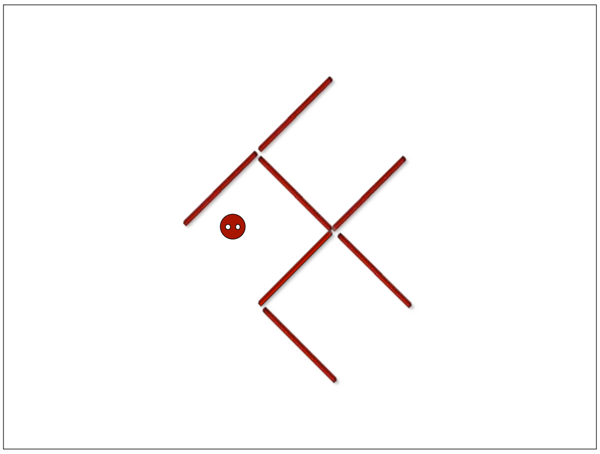
Practise logic and spatial reasoning

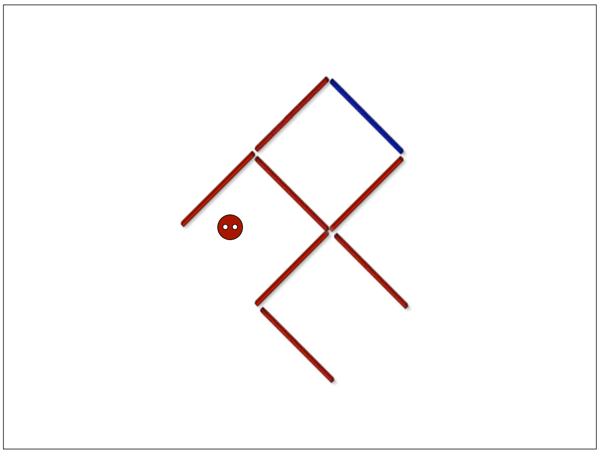
Do you want to see the solution?

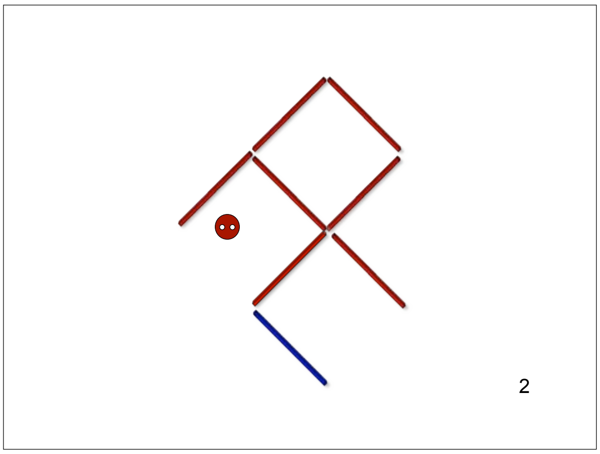


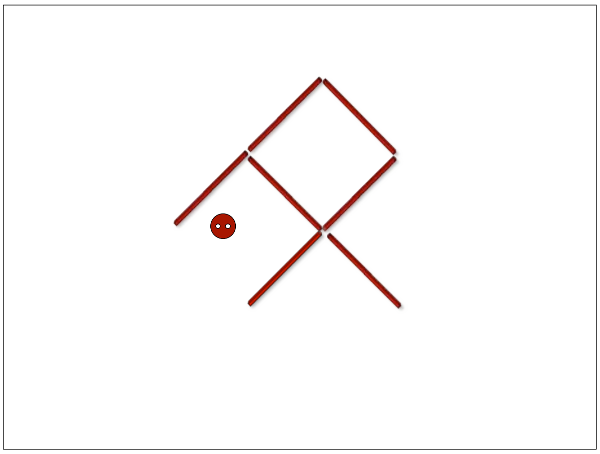


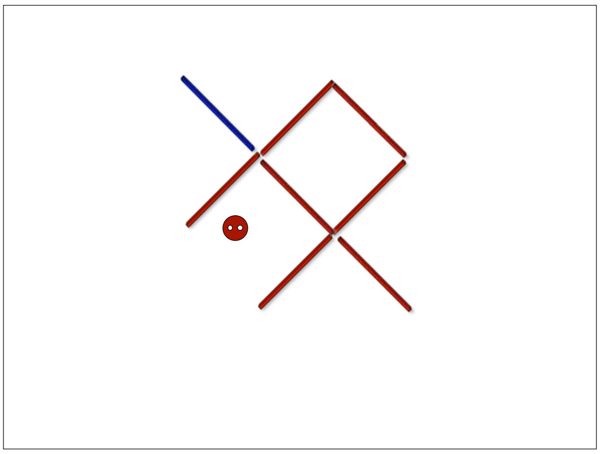
1

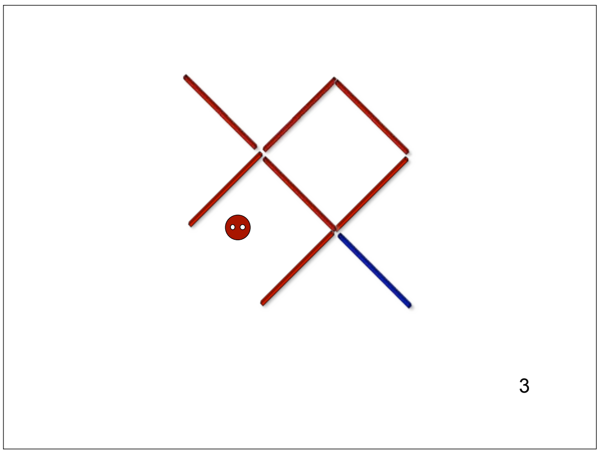


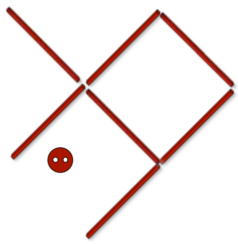


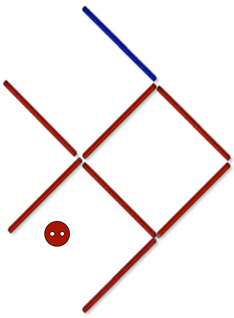

2

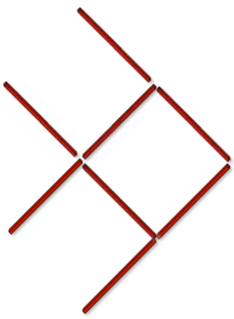


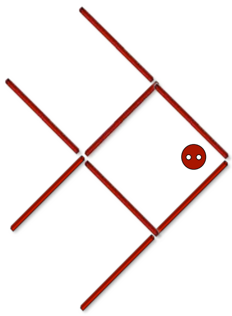



3



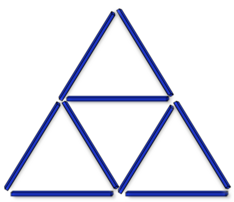






Many triangles

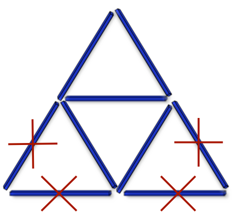
Use 9 sticks and build the figure below. It´s the starting point in each of the following problems.



1. Take away 4 sticks so two triangles are left
2. Take away 3 sticks so two triangles are left
3. Take away 2 sticks so two triangles are left

Many triangles

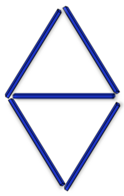
Use 9 sticks and build the figure below. It´s the starting point in each of the following problems.



1. Take away 4 sticks so two triangles are left

Many triangles

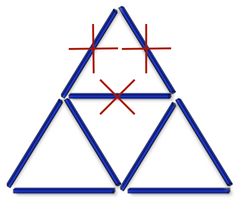
Use 9 sticks and build the figure below. It´s the starting point in each of the following problems.



1. Take away 4 sticks so that two triangles are left

Many triangles

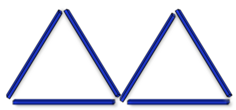
Use 9 sticks and build the figure below. It´s the starting point in each of the following problems.



2. Take away 3 sticks so that two triangles are left

Many triangles

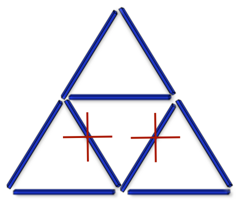
Use 9 sticks and build the figure below. It´s the starting point in each of the following problems.



2. Take away 3 sticks so that two triangles are left

Many triangles

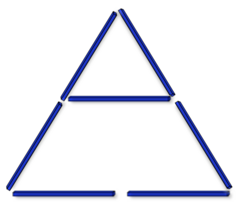
Use 9 sticks and build the figure below. It´s the starting point in each of the following problems.



3. Take away 2 sticks so that two triangles are left

Many triangles

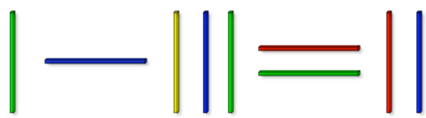
Use 9 sticks and build the figure below. It´s the starting point in each of the following problems.



3. Take away 2 sticks so that two triangles are left

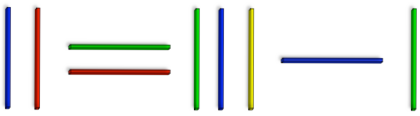
Untrue

The sticks claim that 1 – 3 = 2, and that´s not true. Is it possible to make it right WITHOUT moving any stick?

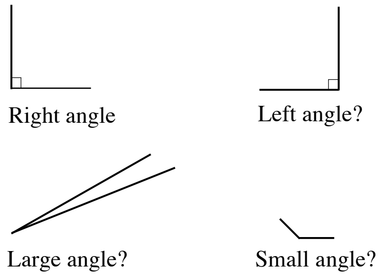


Untrue

Read in the opposite direction!



Some misconceptions

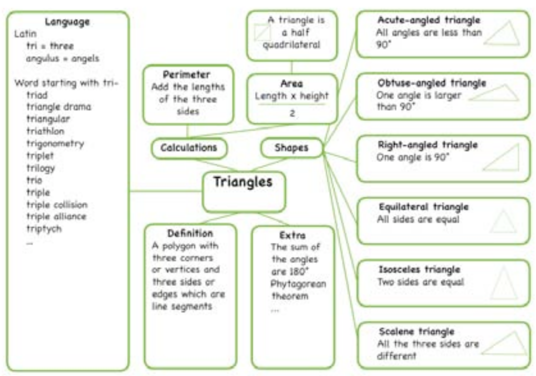


Perimeter and area

- A given perimeter can give different areas
- A given area can give different perimeters

Trianglar

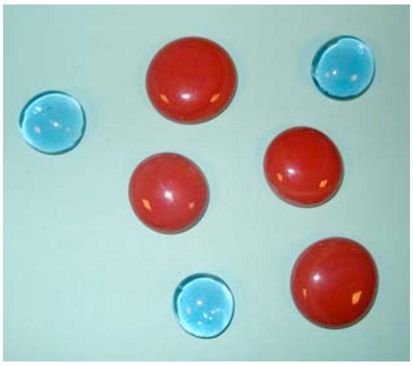
Vilka olika sorters trianglar finns det?

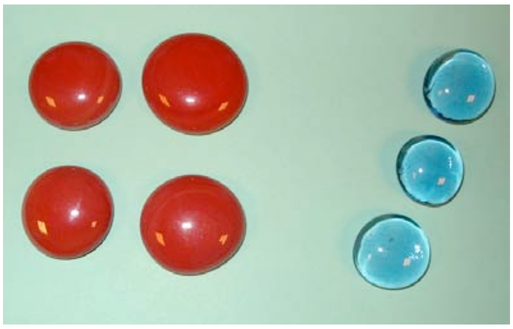


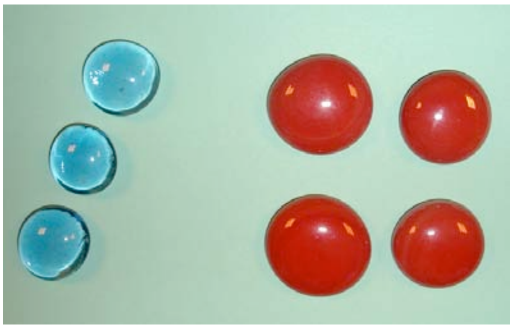
Olika geometrier

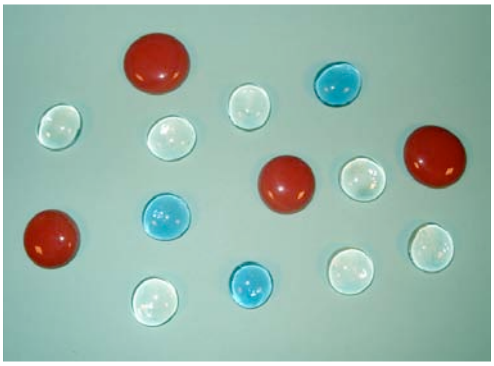
- Euklidisk, i planet
- Elliptisk, på sfären
- Hyperbolisk, ”dal på en ås”

- Vinkelsumman i en triangel?
- Varför flyger vi över Grönland på väg till USA?





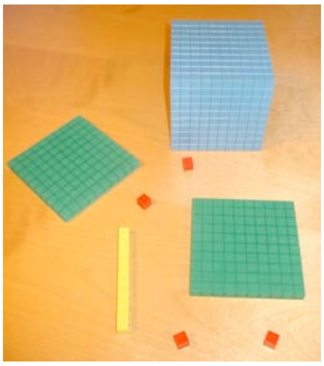


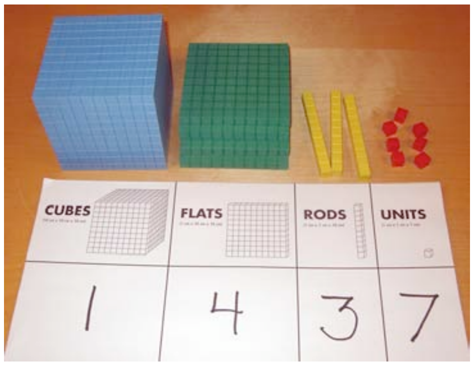



10 KR
5 KR
1 KR

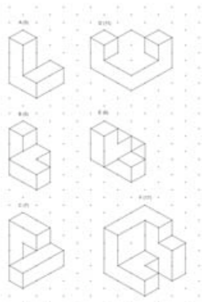

1000
ETT HUNDRA KRONOR
100


1000
100 ETT HUNDRA KRONOR





Multilink cubes



- Try to build these figures
- The numbers in the brackets show how many cubes are needed
- Turn the paper over
- Build your own figures and draw them

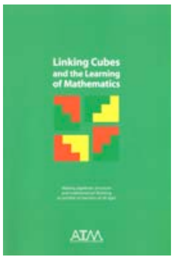
Ur en annan synvinkel

Material

Dime eller multilinkkuber, prickpapper och färgpennor

- Bygg en liten geometrisk kropp och ställ den mitt på bänken.
- Rita av det du byggt från där du sitter.
- Flytta sedan runt stolen och rita av samma kropp från höger, vänster och från baksidan.
- Avsluta med att rita av kroppen ovanifrån.

Multilink cubes



Linking Cubes and the Learning of Mathematics –

Making Algebraic Structure and Mathematical Thinking Accessible to Learners of all Ages

Paul Andrews

Association of Teachers of Mathematics

www.atm.org.uk